青岛大学 2015 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：<u>657</u>科目名称：<u>数学分析</u>（共 2 页）

<u>请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效</u>

一、求极限和求导数（满分 36 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ ．

2．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ ．

3．$\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin 2x}$ ．

4．$y=\arctan x$ 满足 $(1+x^2)y''+2xy'=0$，求 $y^{(n)}|_{x=0}$ ．

5．设 $F(x)=\int_{a-bx}^{a+bx}\sin(xt^2)dt$，求 $F'(x)$ ．

6．设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases} x-u^2-yv=0 \\ y-v^2-xu=0 \end{cases}$ 确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ．

二、求下列积分（满分 30 分）

1．求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$ ．

2．设$D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，求 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{x+y}}dxdy$ ．

3．设S是单位上半椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算曲面积分

$$\iint\limits_S 3yzdydz+2zxdzdx+xydxdy \ .$$

三、（满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，$a\cdot b>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $3\xi^2(f(b)-f(a))=(b^3-a^3)f'(\xi)$.

四、（满分 12 分）设 $T_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$， $f(x)$ 在$[0,2\pi]$上连续，求 $a_0,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 使 $\int_0^{2\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx$ 最小。

五、（满分 12 分）证明：若$\forall x\in[a,b]$，存在实数M_x及邻域 $U(x,\delta_x)$ 使得对$u\in U(x,\delta_x)\bigcap[a,b]$ 成立 $|f(x)|\le M_x$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界。

六、（满分 12 分）应用格林公式计算星形线：$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 所围的平面图形的面积。

七、（满分 12 分）证明Γ函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ 在$(0,+\infty)$内连续。

八、（满分 12 分）确定幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛半径和收敛域。

九、（满分 12 分）计算曲线积分$\omega=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$是一按段光滑的封闭曲线，取正向，$(0,0)$是$L$所围区域$D$的内点。